CLASE 11. Funciones Elementales (no tan elementales)

En esta clase ampliaremos nuestro "catálogo" de funciones complejas para incluir la función exponencial, las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas y el logaritmo.

11.1 La Función Exponencial

Deseamos definir la función exponencial e^z, para valores de z complejos, pero sin alterar sus *propiedades fundamentales* y de manera que incluya, como caso especial (cuando $z = x \in \mathbb{R}$), la función exponencial real (ya conocida) e^x. Una primera regla que debe mantenerse es

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

por ser ésta una regla de la potenciación, independientemente de la base (no solamente para la base e).

Esto hace que, escribiendo $z = x + iy$, se deba cumplir

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

siendo e^x la función exponencial real.

Luego, sólo debemos definir, apropiadamente, la función e^{iy} para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Mostraremos a continuación que la única manera posible de hacerlo es mediante la Fórmula de Euler.[1] Independientemente de como se defina, es claro que la función (de variable real) e^{iy} debe cumplir la siguiente regla de la potenciación:

$$e^{i\,0} = e^0 = 1. \tag{1}$$

También debe cumplir la propiedad que diferencia a la exponencial (real) de cualquier otra función (real):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(e^{iy}\right) = \left(e^{iy}\right)' = ie^{iy}. \tag{2}$$

[1] La otra manera, más usual de hecho, de demostrar esto es mediante Series de Potencias Complejas (tema que no ha sido ni será abordado todavía): Al desarrollar e^{iy} en serie de MacLaurin (compleja) y separar sus partes real e imaginaria, se obtienen dos series reales que corresponden, justamente, con la serie (real) del coseno y la serie (real) del seno, respectivamente. De aquí se concluye que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$.

Denotando de la manera usual a las partes real e imaginaria de la función (por determinar) e^{iy}, es decir, $e^{iy} = u(y) + iv(y)$, las ecuaciones (1) y (2) quedan, respectivamente,

$$u(0) + iv(0) = 1$$
$$u'(y) + iv'(y) = i\,(u(y) + iv(y)) = -v(y) + iu(y),$$

ecuaciones que, a su vez, se traducen en las siguientes dos ecuaciones diferenciales reales (recuerde que dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales y sus partes imaginarias coinciden)

$$\begin{cases} u'(y) = -v(y) \\ v'(y) = u(y), \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

De aquí concluimos que tanto u como v cumplen la ecuación diferencial de segundo orden $\begin{cases} u''(y) = -u(y) \\ v''(y) = -v(y) \end{cases}$, con condiciones iniciales $\begin{cases} u(0) = 1 \\ v(0) = 0. \end{cases}$

Luego, $u(y) = \cos(y)$ y $v(y) = \operatorname{sen}(y)$, de donde, sustituyendo obtenemos

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

De esta manera, definimos

Definición 11.1 (Función Exponencial)**.** Si $z = x + iy$, definimos la función exponencial (compleja) e^z por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Cuando z es real, se tiene $y = 0$, $z = x$ y $e^z = e^x$ (real). Para $z = 0$ es $e^z = 1$.

Algunas Propiedades de la función exponencial son:

a) Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ entonces se cumple que $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. La demostración se puede hacer usando la definición recién dada y algunas identidades trigonométricas (reales).

b) Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, es $e^z \neq 0$ y $|e^z| = e^x$.

Para la demostración, basta denotar $z = x + iy$ y, por tanto, $-z = -x - iy$, para luego efectuar, usando la propiedad anterior, $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. De aquí se desprende que ningún factor (en particular e^z) puede ser cero.

Además $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1$ y $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x$, ya que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Para $z \in \mathbb{C}$ es $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\pi i$, siendo k entero.

Para probar la doble implicación, note primero que si $z = 2k\pi i$ entonces se cumple que $e^z = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi) = 1$.

Recíprocamente, si $e^z = 1$, hacemos $z = x + iy$ y se obtiene que $e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = 1$, ecuación compleja que equivale, gracias a la Propiedad (i), a las siguientes dos ecuaciones reales (que resultan al igualar las partes reales y las partes imaginarias):

$$e^x \cos y = 1 \tag{3}$$

y

$$e^x \operatorname{sen} y = 0. \tag{4}$$

De esta última, por ser $e^x > 0$, se tiene que $\operatorname{sen} y = 0$, así que $y = n\pi$, con n entero. Observando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, sustituyendo en (3), obtenemos $e^x(-1)^n = 1$. Siendo $e^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación anterior implica que $n = 2k$ con k entero (n es par), así que $e^x = 1$ y, por tanto, $x = 0$. Luego $z = x + iy = 0 + in\pi = 2k\pi i$.

***Observación* 11.2.** En el proceso de extender el dominio de la función exponencial a todo el plano complejo, resulta natural que se pierdan algunas propiedades (no-fundamentales) de la exponencial real. Una de éstas propiedades es la inyectividad, lo que nos traerá problemas al considerar "su" función inversa, es decir, "el" logaritmo[2]. Para probar que la exponencial compleja no es inyectiva, basta notar que de la Fórmula de Euler y de la periodicidad de las funciones trigonométricas reales se tiene que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \left(\cos(y + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi)\right) = e^{z+2k\pi i},$$

siendo k cualquier número entero.

[2]Lo que haremos será proceder como en matemáticas 1, cuando se introdujeron las funciones trigonométricas inversas.

11.2 Las Funciones Trigonométricas

Motivaremos la definición partiendo de la Fórmula de Euler: De $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ y $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$ (siendo α cualquier número real) se obtienen

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$
$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Extendemos estas funciones reales a funciones de variable compleja con la siguiente definición:

Definición 11.3 (Funciones Seno y Coseno)**.** Para cualquier número complejo z, definimos

$$\text{sen}\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Algunas Propiedades de éstas funciones trigonométricas son:

1. Si $\text{sen}\,z = 0$ entonces $z = n\pi$, siendo n entero; y Si $\cos z = 0$, entonces $z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, con n entero.

   En otras palabras los ceros de las funciones complejas seno y coseno son exactamente los ceros de las funciones reales seno y coseno. La demostración consiste en usar la definición: si $\text{sen}\,z = 0$ es $e^{iz} - e^{-iz} = 0$, de donde $e^{2iz} = 1$. Luego, gracias a la Propiedad c), $2iz = 2k\pi i$, siendo k entero, de donde concluimos que $z = n\pi$, con n entero. La demostración para $\cos z = 0$ es similar.

   Conociendo donde se anulan las funciones seno y coseno, podemos definir:

$$\tan z = \frac{\text{sen}\,z}{\cos z}, \quad \text{para } z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi.$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\text{sen}\,z}, \quad \text{para } z \neq n\pi.$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi.$$
$$\csc z = \frac{1}{\text{sen}\,z}, \quad z \neq n\pi.$$

2. La parte real y la parte imaginaria de las funciones seno y coseno vienen dadas por

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen}(x)\ \cosh(y) + i\cos(x)\ \operatorname{senh}(y)$$
$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos(x)\ \cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\ \operatorname{senh}(y).$$

   Para demostrar la primera de ellas, recordamos las funciones hiperbólicas reales $\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\operatorname{senh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$, y de la definición de la función seno es

$$\begin{aligned} 2i\operatorname{sen} z = e^{iz} - e^{-iz} &= e^{i\,(x+iy)} - e^{-i\,(x+iy)} \\ &= e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x) \\ &= i\operatorname{sen} x\,(e^y + e^{-y}) - \cos x\,(e^y + e^{-y}) \\ &= 2i\operatorname{sen} x\cosh y - 2\cos x\operatorname{senh} y, \end{aligned}$$

   de donde despejamos

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x\cosh y - \frac{1}{i}\cos x\operatorname{senh} y$$

   es decir,

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x\cosh y + i\cos x\operatorname{senh} y.$$

   La prueba para el coseno es similar. Fácilmente se prueban

3. $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

4. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

5. $\operatorname{sen}(iy) = i\operatorname{senh} y$.

6. $\cos(iy) = \cosh y$, y también las identidades usuales (conocidas) para funciones trigonométricas, por ejemplo:

7. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

8. $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z\cos w + \cos z\operatorname{sen} w$.

9. $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \operatorname{sen} z\operatorname{sen} w$.

10. $\operatorname{sen}(2z) = 2\operatorname{sen} z\cos z$.

11. $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$.

11.3 Las Funciones Hiperbólicas

Por analogía al caso real, definimos las funciones hiperbólicas complejas de la siguiente forma:

Definición 11.4 (Seno Hiperbólico y Coseno Hiperbólico)**.** Para cualquier número complejo z, definimos

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Algunas Propiedades de éstas funciones son:

i) Si $\operatorname{senh} z = 0$ entonces $z = n\pi i$, con n entero; si $\cosh z = 0$ entonces $z = (2n+1)\dfrac{\pi i}{2}$, con n entero. Observamos que los ceros de $\operatorname{senh} z$ y de $\cosh z$ son números imaginarios puros.

   Ésta propiedad nos permite definir las otras funciones hiperbólicas:

$$\begin{array}{llll} \tanh z = \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, & \text{si } z \neq (2n+1)\dfrac{\pi i}{2} & ; \quad \coth z = \dfrac{1}{\tanh z}, & \text{para } z \neq n\pi i \\ \operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}, & z \neq (2n+1)\dfrac{\pi i}{2} & ; \quad \operatorname{csch} z = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}, & z \neq n\pi i, \end{array}$$

   siendo n entero (en todas estas definiciones).

ii) La parte real y la parte imaginaria de las funciones $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ se obtienen con una técnica similar al caso trigonométrico y son dadas por:

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x+iy) = \cos y \operatorname{senh} x + i \operatorname{sen} y \cosh x$$
$$\cosh z = \cosh(x+iy) = \cos y \cosh x + i \operatorname{sen} y \operatorname{senh} x.$$

iii) $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{senh}^2 x \quad , \quad |\cosh z|^2 = \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x$.

iv) $\operatorname{senh}(2z) = 2 \operatorname{senh} z \cosh z \quad , \quad \cosh(2z) = \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z$.

v) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

11.4 Función Logaritmo

Mostraremos que la función $f(w) = e^w$ toma todos los valores complejos excepto el valor cero, y usaremos la notación $\ln|z|$ para representar el logaritmo neperiano (real) del número positivo $|z|$, con $z = x + iy \neq 0$.

Teorema 11.5. *Para cualquier número complejo $z \neq 0$ existe un número complejo w tal que $e^w = z$.*

Prueba. Escribimos el número complejo $z \neq 0$, $z = x + iy$, en Forma Polar: $z = |z|e^{i\theta}$, donde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \text{Arg}(z)$ y, por tanto, $-\pi < \theta \leq \pi$ (el Valor Principal del Argumento).

Sea $w = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z) + 2n\pi i$, siendo n cualquier entero, y probemos que $e^w = z$. En efecto,

$$e^w \overset{\overset{(a)}{\downarrow}}{=} e^{\ln|z|} e^{i\,\text{Arg}(z)} e^{2n\pi i} = |z|e^{i\theta} = z,$$

ya que $e^{2n\pi i} = 1$ (ver Propiedad c)). □

Definición 11.6 (Logaritmo de un número complejo)**.** Sea $z \neq 0$ cualquier número complejo. Si w es un número complejo tal que $e^w = z$ entonces se dice que w es un logaritmo de z y se denotará por $w = \log z$. De la demostración del teorema anterior, se tiene que

$$\log z = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z) + 2n\pi i,$$

siendo n entero (recuerde que $-\pi <\text{Arg}\, z \leq \pi$).

El Valor Principal del logaritmo, denotado por $\text{Log}\, z$, es

$$\text{Log}\, z = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z).$$

El *Valor Principal del logaritmo* también es conocido como el *logaritmo (tomado) en su rama principal* o, sencillamente, la Rama Principal del logaritmo.

A la luz de lo anterior y de la definición del argumento en cualquier rama α, podemos escribir

$$\log_\alpha(z) = \ln(|z|) + i \arg_\alpha(z)$$

y

$$\log(z) = \log_\alpha(z) \quad \text{para algún } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observamos que $w = \log z$ toma infinitos valores para cada valor de $z \neq 0$, luego no es una función, mientras que $w = \text{Log}\, z$ sí lo es (al igual que $w = \log_\alpha(z)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo) .

***Observación* 11.7.** Como la función $\operatorname{Arg} z$ no es continua en el eje real negativo (es decir, en los puntos $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Arg} z = \pi$) ni en cero, el valor principal del logaritmo tampoco es continua en dichos puntos (por esta razón, en algunos libros se define la rama principal del argumento y, por tanto, del logaritmo, de forma que $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, abierto en ambos extremos). Para ver que $\operatorname{Arg} z$ no es continua en, por ejemplo, $z = -1$, basta calcular el limite de $\operatorname{Arg} z$ cuando z tiende a $z = -1$ a lo largo de las (curvas) semicircunferencias (superior e inferior) de radio 1 y centro el origen (ver Figura 1). Sean, entonces,

$$l_1 = \lim_{\substack{(x,y)\to(-1,0) \\ x^2+y^2=1,\, y\geq 0}} \operatorname{Arg} z \qquad \text{y} \qquad l_2 = \lim_{\substack{(x,y)\to(-1,0) \\ x^2+y^2=1,\, y\leq 0}} \operatorname{Arg} z.$$

Como $l_1 \neq l_2$ (pues $l_1 = \pi$ y $l_2 = -\pi$) entonces $\lim_{z\to 1} \operatorname{Arg} z$ no existe y, en consecuencia, la función $\operatorname{Arg} z$ no puede ser continua en $z = -1$. Este mismo argumento sirve para probar que la función no es continua en los puntos del semieje real negativo (tampoco lo es en cero. Recuerde que ni Arg ni arg fueron definidas en cero).

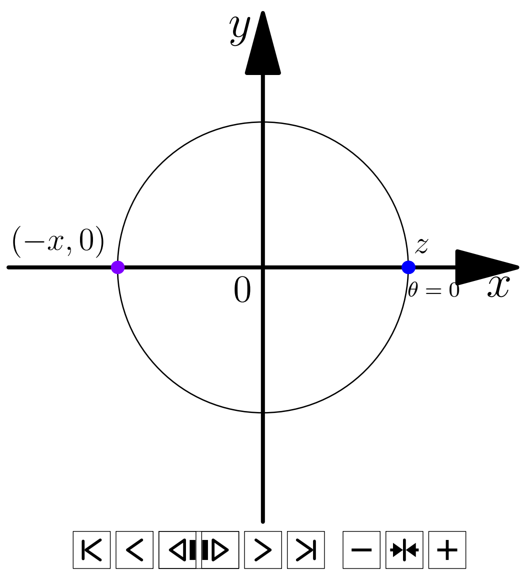

Figura 1: La función $\operatorname{Arg}(z)$ es discontinua en los números complejos con parte real negativa (o cero).

Definición 11.8 (Potenciación de números complejos arbitrarios)**.** Sea z un número complejo no nulo y sea w cualquier número complejo. Definimos z^w por

$$z^w = e^{w \log z}.$$

El valor principal de z^w se define como $e^{w \operatorname{Log} z}$.

Por ejemplo, tomando los valores principales se tiene

$$(-i)^{2i} = e^{2i \operatorname{Log}(-i)} = e^{2i(-\frac{i\pi}{2})} = e^{\pi}$$
$$(-1)^{i} = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}.$$

***Observación* 11.9.** No es cierto que $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$. Por ejemplo, para $z = i$ y $w = -1 + i$ se calcula

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(i) = \ln |i| + i \operatorname{Arg}(i) = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} i,$$
$$\operatorname{Log} w = \operatorname{Log}(-1+i) = \ln |-1+i| + i \operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{3\pi}{4}.$$

Además $zw = i(-1+i) = -1-i$, y así

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(-1-i) = \ln |-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{3}{4}\pi.$$

En consecuencia, $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.